MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 5
22.11.2019

# Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I" -Lösungsvorschlag-

1. a) Hier ist die Grundmenge $G = \mathbb{Q}$ und die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\}$. Gesucht ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Q} \setminus \{-3,3\} \;\middle|\; \frac{x}{3-x} - \frac{x^2+9}{9-x^2} = 1 - \frac{x}{3+x} \right\}.$$

Es ist für $x \in D$

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{3-x} - \frac{x^2+9}{9-x^2} = 1 - \frac{x}{3+x} \\
\iff\; & x(3+x) - x^2 + 9 \;=\; 9 - x^2 - x(3-x) && (*) \\
\iff\; & 3x + x^2 - x^2 + 9 \;=\; 9 - x^2 - 3x + x^2 && \text{(ausmultiplizieren)} \\
\iff\; & 3x - 9 \;=\; 9 - 3x && \text{(zusammenfassen)} \\
\iff\; & 6x \;=\; 18 && \text{(alle } x \text{ auf eine Seite)} \\
\iff\; & x \;=\; 3
\end{aligned}$$

Da $x = 3$ aber nicht in $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\}$ liegt, ist damit $L = \varnothing$.

zu $(*)$: Um $x$ aus dem Nenner zu bekommen, genügt es, wegen $9 - x^2 = (3 - x) \cdot (3 + x)$, beide Seiten mit $(3 - x) \cdot (3 + x)$ zu multiplizieren.

b) Auf der linken Seite der Gleichung stehen 3 Brüche, wovon der Nenner jeweils nicht 0 sein darf, also

$$\begin{aligned}
& x \neq 0 \\
\text{und (mit } x \neq 0\text{)} \quad & 1 + \frac{4}{x} = \frac{x+4}{x} \neq 0 \iff x \neq -4 \\
\text{und (mit } x \neq 0, -4\text{)} \quad & 1 + \frac{3}{1+\frac{4}{x}} = 1 + \frac{3}{\frac{x+4}{x}} = 1 + \frac{3x}{x+4} = \frac{4+4x}{x+4} \neq 0 \iff x \neq -1.
\end{aligned}$$

Also ist $D = \mathbb{Q} \setminus \{-4, -1, 0\}$.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge $L$ formen wir für $x \in D$ die linke Seite der Gleichung um und lösen die Doppelbrüche auf.
Es ist für $x \in D$

$$\begin{aligned}
1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1+\frac{4}{x}}} &= 1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{\frac{x+4}{x}}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{3x}{x+4}} = 1 + \frac{2}{\frac{4x+4}{x+4}} \\
&= 1 + \frac{2(x+4)}{4x+4} = 1 + \frac{x+4}{2x+2} = \frac{2x+2+x+4}{2x+2} \\
&= \frac{3x+6}{2x+2},
\end{aligned}$$

also

$$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\frac{4}{x}}} \iff \frac{3x+6}{2x+2}$$

$$\begin{aligned}
&\iff && 3x+6 \;=\; 2x^2+2x \\
&\iff && 2x^2-x-6 \;=\; 0 \\
&\iff && x^2-\frac{1}{2}x-3 \;=\; 0 \\
&\iff && (x-2)\cdot\big(x+\frac{3}{2}\big) \;=\; 0 \\
&\iff && x=2 \;\vee\; x=-\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Da nun $2\in D$ und $-\frac{3}{2}\in D$, ist (wegen "$\iff$") also $L=\{2,\ -\frac{3}{2}\}$.

2. Wir formen die Ausgangsgleichung so um, wie im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2b) vom 5. Tutoriumsblatt erläutert:

   Es ist für $x\in\left[\frac{2}{3},\infty\right[$

$$\begin{aligned}
& && \sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=-1 \\
& \iff && \sqrt{3x-2}=\sqrt{4x+1}-1 \\
(!!) & \implies && (\sqrt{3x-2})^2=(\sqrt{4x+1}-1)^2 && \text{(quadrieren)} \\
& \iff && 3x-2=4x+1-2\sqrt{4x+1}+1 && \text{(binomische Formel)} \\
& \iff && 2\sqrt{4x+1}=4x+1+1-3x+2 \\
& \iff && 2\sqrt{4x+1}=x+4 \\
(!!) & \implies && (2\sqrt{4x+1})^2=(x+4)^2 && \text{(erneut quadrieren)} \\
& \iff && 4(4x+1)=x^2+8x+16 && \text{(binomische Formel)} \\
& \iff && 16x+4=x^2+8x+16 \\
& \iff && 0=x^2-8x+12 \\
& \iff && 0=(x-2)\cdot(x-6) \\
& \iff && x=2 \;\vee\; x=6
\end{aligned}$$

   Damit (da in unserer Umformungskette auch Implikationspfeile $\implies$ statt ausschließlich Äquivalenzpfeilen $\iff$ vorkamen) können wir zunächst allerdings nur sagen, daß als Lösungen **nur** $x=3$ oder $x=6$ **in Frage kommen**, daß dies also die einzigen **möglichen** Lösungen sind!
   Ob es tatsächlich Lösungen sind, müssen wir als erstes überprüfen, ob 2 und 6 überhaupt in $D=[-\frac{1}{4},\infty[$ liegen, wie in der Aufgabenstellung gefordert (was der Fall ist!), und dann, ob damit die Ausgangsgleichung erfüllt ist, was wir durch einsetzen (Probe!) abklären:
   Für $x=2$ ist

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{4}-\sqrt{9}=2-3=-1, \quad \checkmark$$

   so daß $x=2$ tatsächlich eine Lösung ist. Für $x=6$ ist

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=\sqrt{16}-\sqrt{25}=4-5=-1, \quad \checkmark$$

   so daß auch $x=6$ eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

   Die Lösungsmenge ist also $L=\{2,\ 6\}$.

3. a) Nach Definition ist $K$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Da sich jede Zahl $a \in \mathbb{Q}$ schreiben lässt als $a = a + 0 \cdot \sqrt{2} \in K$, gilt auch $\mathbb{Q} \subset K$. Da auf dem Tutoriumsblatt 5 schon gezeigt wurde, daß Summen, Produkte und Negative von Elementen von $K$ wieder in $K$ liegen, liefert die „gewöhnliche“ Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ auch sinnvolle Verknüpfungen auf der Menge $K$.

Wegen $0, 1 \in \mathbb{Q} \subset K$ sind neutrale Elemente für beide Verknüpfungen in $K$ enthalten, und da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, gelten in $K$ all diejenigen Körperaxiome (weil sie in $\mathbb{R}$ gelten), die nicht die *Existenz* von Objekten fordern: Die Assoziativität von $+$ beispielsweise gilt in $K$, weil sie in $\mathbb{R}$ gilt; die Existenz von multiplikativen Inversen dagegen ist nicht klar: Ist $0 \neq a \in K$, so gibt es zwar in $\mathbb{R}$ ein Element $a^{-1}$, aber von diesem ist nicht klar, ob es wieder in $K$ liegt.

Automatisch übertragen sich also von $\mathbb{R}$ auf $K$ die Assoziativität und Kommutativität beider Verknüpfungen sowie die Distributivität. Die Existenz neutraler Elemente haben wir schon festgestellt, ebenso die von inversen Elementen bezüglich $+$. Also sind in $K$ schon mal von den Körperaxiomen 3.1 schon mal die Punkte 1.i)-iv), 2.i),ii) und iv) und 3. erfüllt.

b) Die angegebene Formel ergibt sich aus der dritten binomischen Formel:

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - (b\sqrt{2})^2 = a^2 - 2b^2.$$

Entscheidend ist nun, daß $a^2 - 2b^2$ stets in $\mathbb{Q}$ liegt (dies folgt sofort aus $a, b \in \mathbb{Q}$), und sofern $a + b\sqrt{2} \neq 0$ ist, ist auch $a^2 - 2b^2 \neq 0$: Denn andernfalls wäre $a^2 = 2b^2$; da nicht $a$ und $b$ beide null sind (sonst wäre $a + b\sqrt{2} = 0$), müssen sie aufgrund dieser Gleichung beide von Null verschieden sein. Dann folgt aber $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, also wäre $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl mit Quadrat 2, und eine solche gibt es laut Vorlesung nicht.

Damit kann man aber eine Formel für multiplikative Inverse angeben: Für $0 \neq a + b\sqrt{2} \in K$ gilt

$$1 = \frac{1}{a^2 - 2b^2}\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\right),$$

also

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^{-1} = \underbrace{\frac{a}{a^2 - 2b^2}}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{\frac{b}{a^2 - 2b^2}}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2},$$

und dies ist ein Element von $K$.

c) In a) haben wir alle Körperaxiome nachgewiesen bis auf die Existenz multiplikativer Inverser (3.1 2.iii); diese folgte in b), und damit ist $K$ ein Körper.

4. a) Wir formen den Term $x^2 + 2px + q$ mittels Quadratischer Ergänzung um:

$$\begin{aligned} x^2 + 2px + q &= \underbrace{x^2 + 2px + p^2}_{(x+p)^2} - p^2 + q \\ &= (x + p)^2 - (p^2 - q) \qquad \text{(binomische Formel)} \\ &= (x + p)^2 - w^2 \qquad \text{(Definition von } w\text{)} \\ &= (x + p + w) \cdot (x + p - w). \qquad \text{(dritte binomische Formel)} \end{aligned}$$

Es ist also genau dann $x^2 + 2px + q = 0$, wenn $(x + p + w) \cdot (x + p - w) = 0$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist, also im Fall $x + p + w = 0$, d.h. $x = -p - w$, und im Fall $x + p - w = 0$, d.h. $x = -p + w$.

b) Die Gleichung $x^2 + 10x + 21 = 0$ hat die Form $x^2 + 2px + q = 0$ mit $p = 5$ und $q = 21$. Tatsächlich ist $p^2 - q = 25 - 21 = 4 = 2^2$, wir können also in Teilaufgabe a) $w = 2$ setzen und erhalten dann, daß genau dann $x^2+10x+21 = 0$ ist, wenn $x = -p+w = -5+2 = -3$ oder $x = -p-w = -5-2 = -7$ ist. Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $L = \{-3, -7\}$.